

## Критерий Найквиста в логарифмическом масштабе

Чаще всего в практических расчетах используется критерий Найквиста в логарифмических масштабах из-за значительной простоты и удобства расчетов. Рассмотрим его применение на примере (рис. 79).

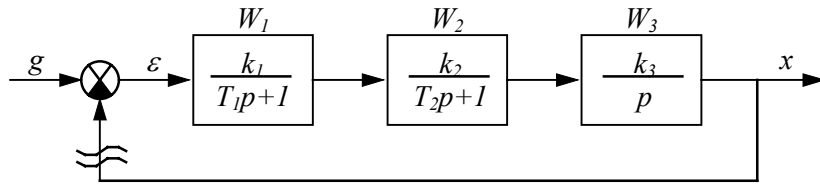


рис. 79

Разрываем контур обратной связи и определим ПФ разомкнутой системы  $W_p$

$$W_p = W_1 W_2 W_3 = \frac{k_1 k_2 k_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p} = \frac{k_p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p}, \quad (1)$$

где  $k_p = k_1 k_2 k_3$  – коэффициент усиления (всегда величина безразмерная) разомкнутой системы.

Как видно из (1) структура состоит из 4-х типовых звеньев: усилительного  $k_p$ , интегрирующего  $\frac{1}{p}$

и двух апериодических  $\frac{1}{T_1 p + 1}$  и  $\frac{1}{T_2 p + 1}$ .

ЛАХ:

$$20 \lg A_p(\omega) = 20 \lg k_p + 20 \lg \left| \frac{1}{j\omega} \right| + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + jT_1 \omega} \right| + 20 \lg \left| \frac{1}{1 + jT_2 \omega} \right| \quad (2)$$

ЛФХ:

$$\varphi_p = \varphi_{W_1} + \varphi_{W_2} + \varphi_{W_3} \quad (3)$$

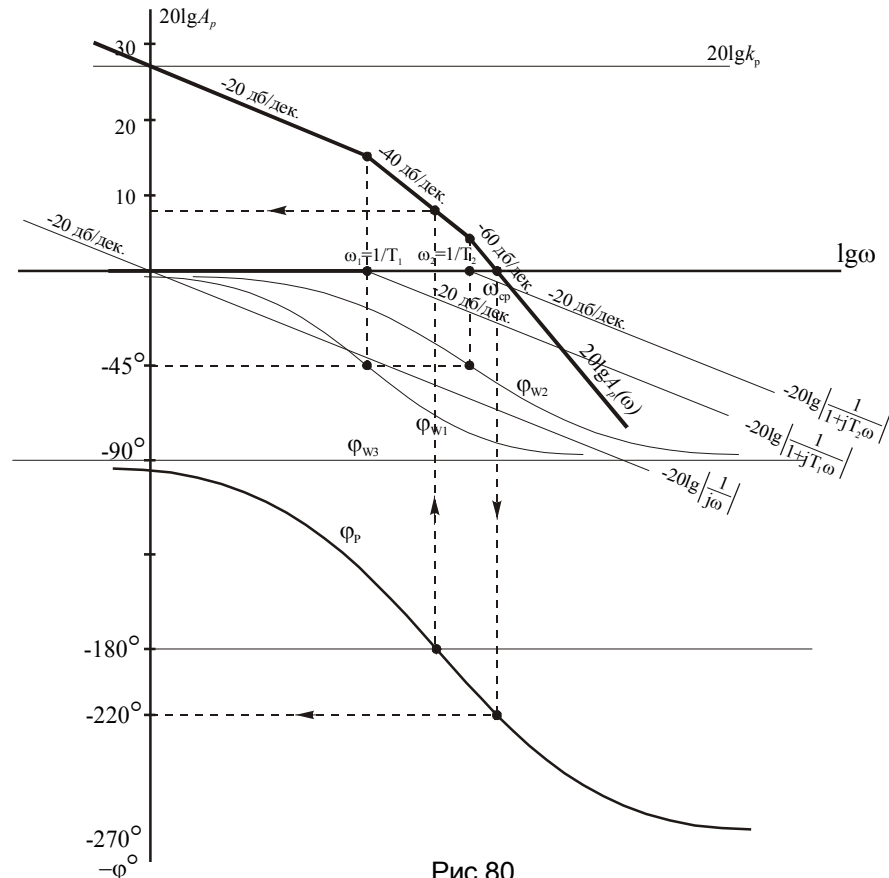


Рис.80

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} - \text{частота сопряжения для звена } \frac{1}{T_1 p + 1};$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} - \text{частота сопряжения для звена } \frac{1}{T_2 p + 1};$$

$$\varphi_{W_1} = -\arctg T_1 \omega; \quad \varphi_{W_2} = -\arctg T_2 \omega; \quad \varphi_{W_3} = -\frac{\pi}{2}.$$

Пересечение результирующей ЛАХ разомкнутой системы с осью частот называется частотой среза  $\omega_{cp}$ : при  $\omega < \omega_{cp}$ ,  $A_p > 1$ ; при  $\omega > \omega_{cp}$ ,  $A_p < 1$ .

В критерии Найквиста критическими величинами являются  $\varphi_p = -180^\circ$  и  $A_p = |M| = 1$  или в логарифмическом масштабе  $20 \lg A_p = 20 \lg 1 = 0$ .

Смотрим, чему равна фаза  $\varphi_p$  при  $20 \lg A_p = 0$ :

$$\varphi_p = -220^\circ$$

и амплитуда (модуль) при  $\varphi_p = -180^\circ$ :

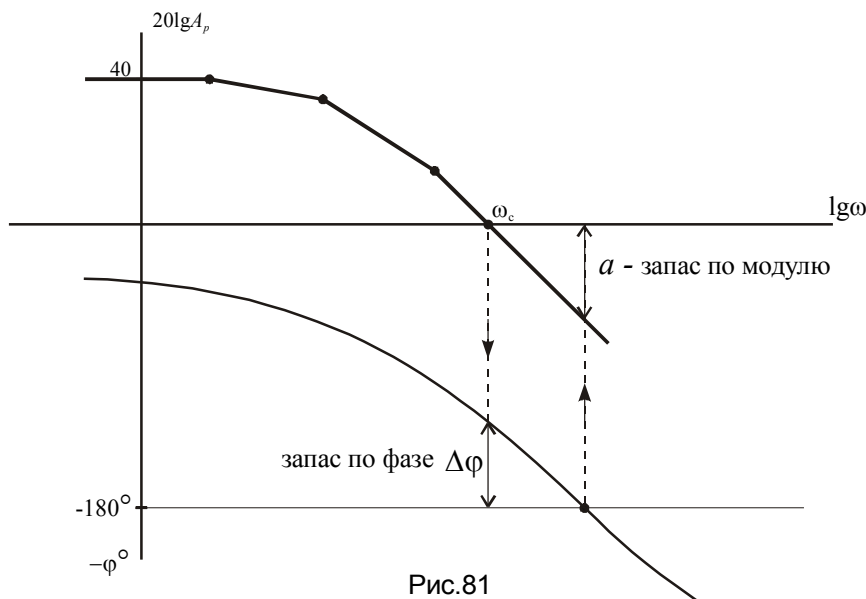
$$20 \lg A_p \approx 8 \text{ или } A_p > 1.$$

Следовательно, рассматриваемая в примере система в замкнутом состоянии неустойчива.

Критерий Найквиста в логарифмическом масштабе: Для устойчивой системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы логарифмические характеристики разомкнутой системы имели:

1. при  $\varphi_p = -180^\circ$ ,  $20 \lg A_p < 0$ ;

2. при  $20 \lg A_p = 0$ ,  $\varphi_p^0 > -180^\circ$ .

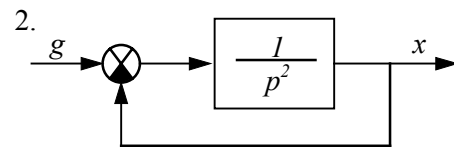
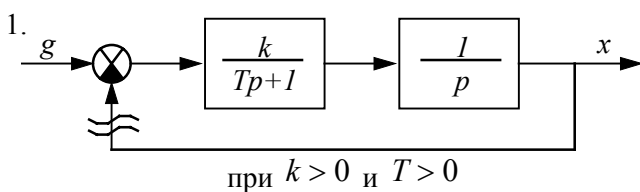


Запасы устойчивости по фазе и амплитуде определяются для устойчивой системы как показано на рис.81.

Рис.81

Примеры:

Дать заключение об устойчивости и нарисовать графики частотных и переходных характеристик.



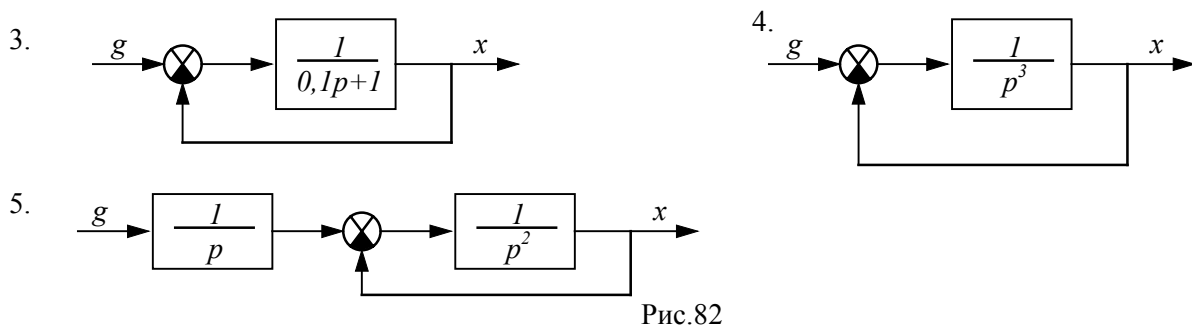


Рис.82

### Д - разбиение

Это частотный метод, который позволяет для исследуемой системы определить значения параметров, соответствующих устойчивой работе системы.

Если изменяемый параметр один, то используется Д-разбиение в плоскости одного параметра.

#### Д-разбиение в плоскости одного параметра

Пусть характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$a_n p^n + \tau a'_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + K + a_0 = 0, \quad (1)$$

где  $\tau$  – варьируемый параметр, который характеризует устойчивость системы.

Рассмотрим комплексную плоскость корней уравнения (1).

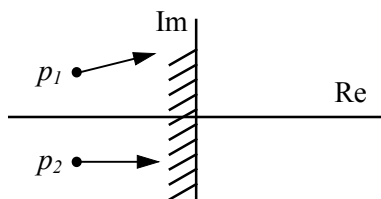


Рис.83

При изменении параметра  $\tau$  корни начинают перемещаться в комплексной плоскости (рис.83). Мнимая ось, являющаяся границей устойчивости, при каком-то определенном  $\tau$  оказывается пройденной.

В методе Д-разбиения мнимая ось отображается в комплексной плоскости параметра  $\tau$ .

Для этого решаем (1) относительно  $\tau$ :

$$\tau(p) = \frac{-a_n p^n - a_{n-2} p^{n-2} - K - a_0}{a'_{n-1} p^{n-1}}, \quad (2)$$

Подставляя в (2)  $p = j\omega$ , получим

$$\tau(j\omega) = \frac{-a_n (j\omega)^n - a_{n-2} (j\omega)^{n-2} - K - a_0}{a'_{n-1} (j\omega)^{n-1}} = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3)$$

где  $P(\omega)$  – вещественная часть комплексного числа  $\tau(j\omega)$ ;

$Q(\omega)$  – мнимая часть комплексного числа  $\tau(j\omega)$ .

Задавая частотой от  $-\infty$  до  $+\infty$ , строим кривую  $\tau(j\omega)$ , которая есть отображение мнимой оси на комплексной плоскости параметра  $\tau(j\omega)$  – кривая Д-разбиения (рис.84).

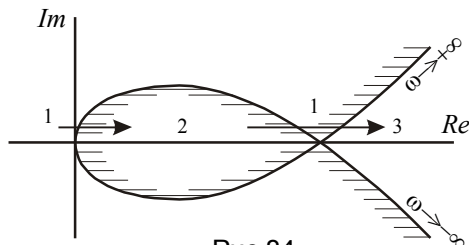


Рис.84

Т.к. частотные характеристики симметричны относительно вещественной оси, кривую Д-разбиения можно строить в пределах  $0 \leq \omega \leq +\infty$ , а затем дополнить её зеркальным отображением относительно вещественной оси. После этого надо наметить предполагаемую область устойчивости. Для этого применяется правило штриховки, основанное на том, что границей в плоскости корней является мнимая ось комплексной плоскости корней

характеристического уравнения, и при движении по ней от  $\omega = -\infty$  до  $\omega = +\infty$ , область корней устойчивой системы располагается слева. Аналогично на Д-кривой заштриховывается левая часть кривой по направлению от  $-\infty$  до  $+\infty$  (рис.84).

Выделим область, претендующую на устойчивость, т.е. ту, которой соответствует наименьшее число правых корней. Если в последующем установим, что их число равно 0, то тем самым выделим область устойчивости.

Допустим, изменяя параметр  $\tau$  мы двигаемся вдоль вещественной оси в положительном направлении из области  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3$ . Тогда:

- полагаем, что в области 1 из  $n$ -корней имеется  $k$ -правых;
- переходя из области 1 в область 2 хотя бы один корень стал отрицательным и тогда имеем  $(k-1)$ -правых корней;
- из  $2 \rightarrow 1$  снова  $k$ -правых корней;
- из  $1 \rightarrow 3$   $k+1$ -правых корней.

Итак, наименьшее число правых корней имеет область 2, но будут ли все корни левыми? Для этого задаются простейшим (в смысле вычисления) параметром  $\tau$  из области 2 и по любому другому критерию определяют устойчивость. В результате чего можем получить два ответа:

1. Система неустойчива, тогда изменением параметра  $\tau$  нельзя добиться устойчивости системы и необходимо добиваться устойчивости изменением (если это возможно) другого параметра.
2. Система устойчива, тогда при любом  $\tau$  из области 2 система будет устойчива. Это положение широко используется при наладке САУ.

### **Качество регулирования**

Устойчивость САУ является необходимым, но далеко не достаточным условием технической пригодности систем. Помимо устойчивости к САУ предъявляются и качественные показатели переходных процессов. Все современные методы анализа качества переходного процесса регулирования можно разделить на две группы:

1. Прямые методы анализа – непосредственное решение дифференциальных уравнений системы и построение по нему графиков переходных процессов.
2. Косвенные методы:
  - 2.1. нахождение корней характеристического уравнения системы;
  - 2.2. интегральный метод;
  - 2.3. частотный метод (наиболее распространён).

Рассмотрим качество регулирования с двух точек зрения:

1. Точность работы системы в установившемся режиме (статический режим).
2. Динамические показатели системы (методы определения качества переходных процессов).

### **Анализ статических режимов**

В реальных САУ не удаётся поддерживать точные значения выходных величин в соответствии с заданным входным воздействием и имеет место ошибка, обусловленная как погрешностями самой системы, так и действием возмущений. Выведем выражение для определения ошибки в многомерной системе для следующей структуры (рис.85).

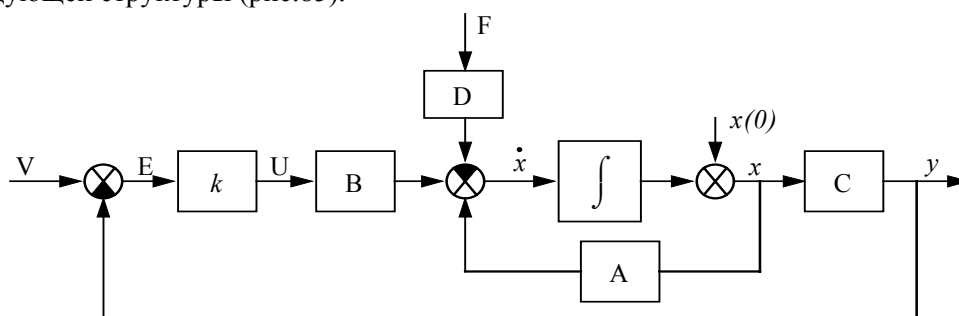


рис.85

При  $t = 0, x(0) = 0$ ;

$$\begin{cases} E = V - y, \\ U = kE, \\ \dot{x} = Ax + BU - DF, \\ y = Cx, \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{где } x \in R^n, U \in R^m, V \in R^m, y \in R^m, F \in R^l, \\ &\dim A = n \times n, \dim B = n \times m, \dim C = m \times n, \dim D = n \times l, \\ &\dim k = m \times m - \text{матрица коэффициентов усиления регулятора.} \end{aligned}$$

Решим данную систему для определения ошибки в установившемся режиме, для чего полагаем  $\dot{x} = 0$ ,  $V = const$ ,  $F = const$ ,  $x(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= Ax_0 + BkE_0 - DF \Rightarrow x_0 = -A^{-1}BkE_0 + A^{-1}DF \Rightarrow C^{-1}y_0 = -A^{-1}BkE_0 + A^{-1}DF \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_0 = -CA^{-1}BkE_0 + CA^{-1}DF \Rightarrow V - E_0 = -CA^{-1}BkE_0 + CA^{-1}DF \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-CA^{-1}Bk + I)E_0 = V - CA^{-1}DF \Rightarrow E_0 = (I - CA^{-1}Bk)^{-1}V_0 - (I - CA^{-1}Bk)^{-1}CA^{-1}DF. \end{aligned}$$

В полученном выражении первое слагаемое отражает влияние задающих воздействий на статику многомерной системы, а второе – влияние возмущений.

### Анализ статических режимов скалярных систем

Имеем САУ со структурной схемой (рис.86).

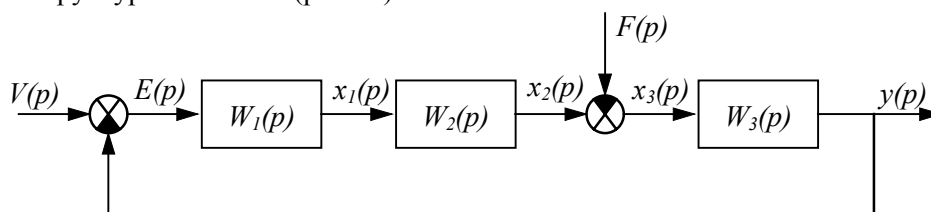


рис. 86

Запишем систему уравнений из структуры

$$\left. \begin{aligned} E(p) &= V(p) - y(p), \\ x_1(p) &= E(p)W_1(p), \\ x_2(p) &= x_1(p)W_2(p), \\ x_3(p) &= x_2(p) - F(p), \\ y(p) &= x_3(p)W_3(p). \end{aligned} \right\} (1)$$

Решаем систему (1) совместно относительно ошибки  $E$ , сигнала управления  $V$  и возмущения  $F$ , получим

$$E(p) = \frac{1}{1 + W_p} V(p) + \frac{W_3}{1 + W_p} F(p), \quad (2)$$

где  $W_p = W_1 W_2 W_3$  – передаточная функция разомкнутой системы.

Обозначим:  $E_y(p) = \frac{1}{1 + W_p} V(p)$  – ошибка от закона регулирования или ошибка от управляющего сигнала.

$$E_F(p) = \frac{W_3}{1 + W_p} F(p) \text{ – ошибка от возмущающего воздействия.}$$

#### 1. Ошибка от закона регулирования.

$$E_y(p) = \frac{1}{1 + W_p} V(p). \quad (1)$$

Рассмотрим случаи, когда  $W_p(p)$  имеет различный вид:

1.1. 
$$W_p(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + K + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + K + a_0} = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (2)$$

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$ , оператор  $p = \frac{d}{dt} = 0$ , тогда

$$W_p(0) = \frac{b_0}{a_0} = k_p \text{ – статический коэффициент усиления разомкнутой системы.}$$

Следовательно, ошибка от закона регулирования в установившемся (статическом) режиме имеет вид

$$\varepsilon_{y.c.}(t \rightarrow \infty) = \frac{1}{1 + k_p} V(t \rightarrow \infty), \quad (3)$$

если  $V(t) = 1$  (единичный ступенчатый сигнал), то

$$\varepsilon_{y.c.} = \frac{1}{1 + k_p}, \quad (4)$$

**Выводы:** 1. При виде передаточной функции разомкнутой системы  $W_p$  (2) (со свободным членом в знаменателе) ошибку в установившемся режиме принципиально не возможно сделать равной нулю – такие системы называются *статическими*.

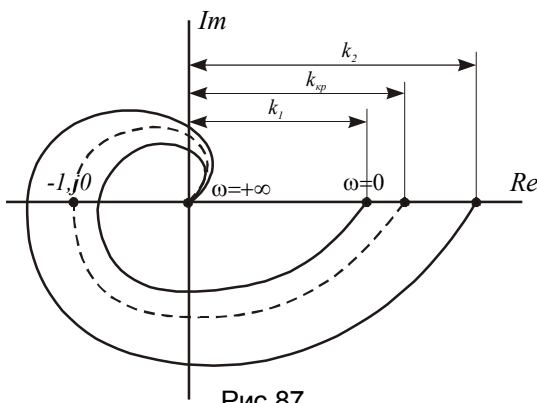


Рис.87

2. С ростом коэффициента усиления ошибка от закона регулирования уменьшается, однако её устойчивость также "уменьшается", а может и оказаться неустойчивой при  $k > k_{kp}$  (рис.87), где  $k_{kp}$  – коэффициент усиления разомкнутой системы, при котором замкнутая система находится на границе устойчивости.

3. При проектировании обычно задается величина ошибки системы в установившемся режиме, по ней из уравнения (4) определяется необходимый  $k_p$

$$k_p = \frac{1}{\varepsilon_{y.c.}} - 1. \quad (5)$$

4. Ошибка от закона регулирования равна 0 только при  $k_p = \infty$ . Такие системы называются *астатическими*.

1.2. Пусть

$$W_p(p) = \frac{B(p)}{pA(p)}. \quad (6)$$

Такую функцию можно получить последовательным подключением к статической системе с ПФ (2) идеального интегрирующего звена  $\frac{1}{p}$ . Подставляя (6) в (1) получим

$$E_y(p) = \frac{1}{1 + \frac{B(p)}{pA(p)}} V(p) = \frac{pA(p)}{pA(p) + B(p)} V(p). \quad (7)$$

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$ ;  $p = 0$ , тогда из (7)

$$\varepsilon_{y.аст.} = 0. \quad (8)$$

**Выводы:** 1. Системы с передаточной функцией вида (6) имеют  $\varepsilon_{y.a.} = 0$  и называются астатическими или следящими.

2. Для расчета необходимого коэффициента усиления в разомкнутом состоянии для следящих систем вводят режим постоянной заводки, т.е. когда входной сигнал изменяется с постоянной скоростью (рис.88).

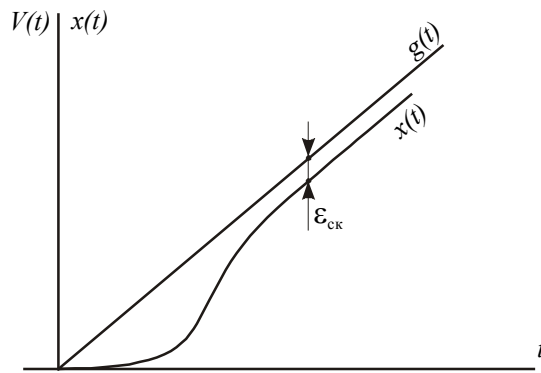


Рис.88

$\Omega = \frac{dV(t)}{dt} = const$  – скорость изменения входного сигнала (скорость постоянной заводки).  
 При этом возникает скоростная ошибка  $\varepsilon_{ск}$  в установившемся режиме.

В изображении по Лапласу

$$\Omega(p) = pV(p). \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7), получим

$$E_{y.ск}(p) = \frac{pA(p)}{pA(p) + B(p)} \cdot \frac{\Omega(p)}{p} = \frac{A(p)}{pA(p) + B(p)} \Omega(p). \quad (10)$$

В установившемся режиме постоянной заводки при  $t \rightarrow \infty$ ;  $p = 0$ , получим

$$\varepsilon_{ск} = \frac{a_0}{b_0} \Omega = \frac{\Omega}{k_p}. \quad (11)$$

Для определения  $k_p$  при заданной  $\varepsilon_{ск}$  выбирают максимально допустимую для данной системы скорость заводки  $\Omega$  (по техническим условиям).

### 1.3. Встает вопрос: Можно ли в САУ сделать $\varepsilon_{ск} = 0$ ?

Если в структуру последовательно добавить ещё одно интегрирующее звено, то ПФ разомкнутой системы получит вид:

$$W_p(p) = \frac{B(p)}{p^2 A(p)}. \quad (12)$$

Проделав аналогичные предыдущему случаю преобразования, получим  $\varepsilon_{ск} = 0$ , однако в ней будет присутствовать ошибка по ускорению. Такие системы называются астатическими с астатизмом второго порядка.

В принципе, можно избавиться и от ошибки по ускорению, включив третье интегрирующее звено – астатическая система с астатизмом 3-го порядка.

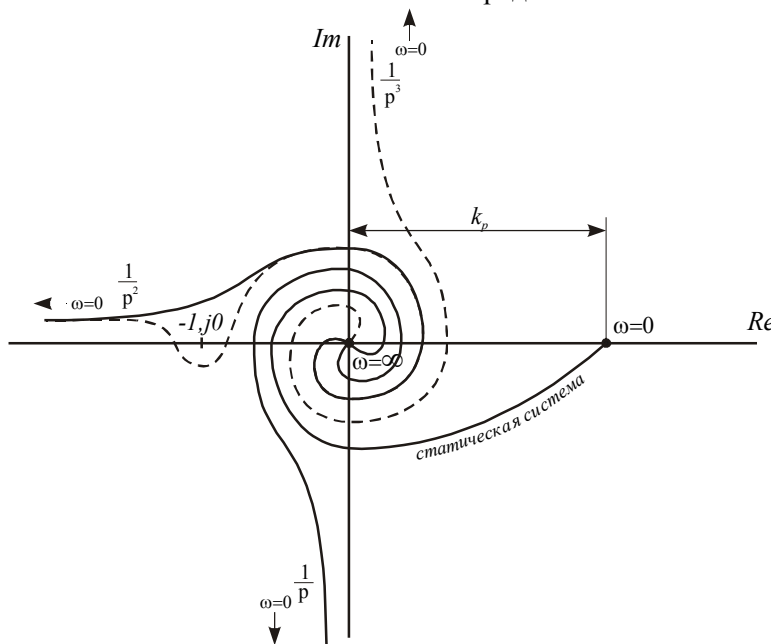


Рис.89

Однако, отметим, что построение замкнутых систем с астатизмом выше 2-го порядка достаточно затруднительно, т.к. при  $n = 2$  (порядок астатизма) САУ уже структурно неустойчива и не может быть реализована без включения дополнительных корректирующих устройств (рис.89)

2. Ошибка по возмущающему воздействию.

$$E_F(p) = \frac{W_3}{1 + W_p} F(p), \quad (1)$$

$f(t)$  – возмущающая единичная ступенчатая функция  $f(t) = 1$ .

2.1. Если

$$W_p = \frac{B(p)}{A(p)} \quad \text{– статическая система,} \quad (2)$$

$$W_3 = \frac{d_s p^s + d_{s-1} p^{s-1} + K + d_0}{c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + K + c_0} = \frac{D(p)}{C(p)} \quad \text{– передаточная функция объекта.} \quad (3)$$

В установившемся режиме при  $t \rightarrow \infty$ ,  $p = 0$ , получим

$$W_p = \frac{b_0}{a_0} = k_p = k_1 k_2 k_3 \quad \text{– коэффициент усиления разомкнутой системы,}$$

$$W_3 = \frac{d_0}{c_0} = k_3 \quad \text{– коэффициент усиления (передачи) объекта.}$$

Тогда ошибка от возмущения единичного ступенчатого скачка определится выражением

$$\varepsilon_F = \frac{k_3}{1 + k_p}. \quad (4)$$

Таким образом, ошибка от возмущения при  $f(t) = 1$  зависит от общего коэффициента усиления разомкнутой системы и коэффициента усиления (передачи) объекта. Уменьшить  $\varepsilon_F$  можно увеличением общего  $k_p$ , но не за счет  $k_3$ , а увеличения  $k_1$  или  $k_2$ .

При  $f(t) = f_0 = const$

Рассмотрим три случая.

2.2. Регулятор и объект регулирования статические.

$$W_{\text{рег.}}(p) = W_1 W_2 = k_{\text{рег.}} \cdot W'_{\text{рег.}}(p), \quad (5)$$

где коэффициент усиления (передачи)  $W'_{\text{рег.}}(p)$  в установившемся режиме равен 1.

$$W_3(p) = k_3 \cdot W'_3(p), \quad (6)$$

где коэффициент усиления (передачи)  $W'_3(p)$  в установившемся режиме также равен 1.

Подставим (5) и (6) в выражение ошибки (1), получим

$$E_F(p) = \frac{k_3 W'_3}{1 + k_{\text{рег.}} k_3 W'_{\text{рег.}} W'_3} F(p). \quad (7)$$

По теореме о начальном и конечном значении изображения по Лапласу имеем:

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$  – теорема о конечном значении по Лапласу.
2.  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pE(p)$  – теорема о начальном значении по Лапласу.

Так как  $f(t) = f_0 = const$ , то изображение по Лапласу от  $f_0$  будет

$$F(p) = \frac{f_0}{p}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7) и воспользовавшись 2.1, получим

$$\varepsilon_F(\infty) = \left[ \frac{k_3 W'_3}{1 + k_{\text{рег.}} k_3 W'_{\text{рег.}} W'_3} \cdot f_0 \right]_{p=0} = \frac{k_3}{1 + k_p} f_0, \quad (9)$$



где  $k_p = k_{pez} k_3 = k_1 k_2 k_3$  – коэффициент усиления разомкнутой системы,  
 $k_3 f_0$  – установившаяся ошибка разомкнутой системы при действии возмущения  $f_0$ ,  
 $\varepsilon_F(\infty)$  – установившаяся ошибка замкнутой системы от возмущения  $f_0$ .

**Вывод:** В замкнутой системе, как это следует из (9) установившаяся ошибка по возмущению  $\varepsilon_F$  в  $1 + k_p$  раз меньше, чем в разомкнутой системе. Т.е. за счет контура обратной связи происходит поддержание выходного параметра на заданном уровне тем точнее, чем больше  $k_p$ .

2.3. Регулятор статический, объект астатический с астатизмом 1-го порядка. Регулятор как и прежде имеет ПФ (5), а объект

$$W_3(p) = \frac{k_3 W'_3(p)}{p}. \quad (10)$$

Подставляем (5) и (10) в выражение ошибки (1), получим

$$E_F(p) = \frac{\frac{k_3 W'_3(p)}{p}}{1 + \frac{k_{pez} k_3 W'_{pez}(p) W'_3(p)}{p}} F(p) = \frac{k_3 W'_3(p)}{p + k_{pez} k_3 W'_{pez}(p) W'_3(p)} F(p). \quad (11)$$

Подставляя (8) в (11) и воспользовавшись 2.1, получим:

$$\varepsilon_F(\infty) = \left[ \frac{k_3 W'_3(p)}{p + k_{pez} k_3 W'_{pez} W'_3} f_0 \right]_{p=0} = \frac{f_0}{k_{pez}}. \quad (12)$$

**Вывод:** Если регулятор статический, а объект регулирования астатический с астатизмом 1-го порядка, то установившаяся ошибка замкнутой системы обратно пропорциональна коэффициенту усиления (передачи) регулятора  $k_{pez} = k_1 k_2$ .

2.4. Регулятор астатический с астатизмом 1-го порядка, объект – статический.

Передаточная функция регулятора

$$W_{pez}(p) = \frac{k_{pez} W'_{pez}(p)}{p}. \quad (13)$$

ПФ объекта имеет, как и ранее, вид (6). Подставляем (13) и (6) в (1)

$$E_F(p) = \frac{\frac{k_3 W'_3(p)}{p}}{1 + \frac{k_{pez} k_3 W'_{pez}(p) W'_3(p)}{p}} F(p) = \frac{pk_3 W'_3(p)}{p + k_{pez} k_3 W'_{pez}(p) W'_3(p)} F(p). \quad (14)$$

Подставляя (8) в (14) и учитывая (2.1), получим

$$\varepsilon_F(0) = \left[ \frac{pk_3 W'_3(p)}{p + k_{pez} k_3 W'_{pez} W'_3} f_0 \right]_{p=0} = 0. \quad (15)$$

**Вывод:** Если регулятор астатический с астатизмом 1-го порядка, то установившаяся ошибка по возмущению  $f_0 = const$  отсутствует  $\varepsilon_F = 0$ .

## Коэффициенты ошибок

Рассматриваемый метод может применяться как для управляющего  $g(t)$ , так и для возмущающего  $f(t)$  воздействий.

Не снижая общности рассуждений, рассмотрим случай, когда имеется только управляющее воздействие  $g(t)$ , т.е.  $f(t) = 0$ .

Ошибка по управлению:

$$E_y(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)} G(p) = W_y(p) G(p). \quad (1)$$

Если входное воздействие  $g(t)$  имеет произвольную форму, но имеет конечное число  $m$  производных

$$\frac{dg(t)}{dt}, \frac{d^2g(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^m g(t)}{dt^m}, \quad (2)$$

то передаточную функцию (1) можно разложить в ряд Тейлора по степеням комплексной величины  $p$ :

$$E_y(p) = \left[ C_0 + C_1 p + \frac{C_2}{2!} p^2 + \frac{C_3}{3!} p^3 + \dots + \frac{C_m}{m!} p^m \right] G(p). \quad (3)$$

Переходя в выражении (3) к оригиналу, получаем формулу для определения установившейся ошибки по управлению.

$$\varepsilon(t) = C_0 g(t) + C_1 \frac{dg(t)}{dt} + \frac{C_2}{2!} \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \frac{C_3}{3!} \frac{d^3g(t)}{dt^3} + \dots + \frac{C_m}{m!} \frac{d^m g(t)}{dt^m}. \quad (4)$$

Коэффициенты

$$C_0 = [W_y(p)]_{p=0}, \quad C_1 = \left[ \frac{dW_y(p)}{dp} \right]_{p=0}, \quad C_2 = \left[ \frac{d^2W_y(p)}{dp^2} \right]_{p=0}, \quad \dots, \quad C_m = \left[ \frac{d^m W_y(p)}{dp^m} \right]_{p=0}$$

называются коэффициентами ошибок и определяются по общему разложению функции  $W_y(p)$  в ряд Тейлора по степеням  $p$ :

- коэффициент  $C_0 \neq 0$  только в статических системах
  - в астатических системах с астатизмом 1-го порядка  $C_0 = 0$
  - в астатических системах с астатизмом 2-го порядка  $C_0 = C_1 = 0$
- и т.д.

### Пример:

Определить коэффициенты ошибок по управляющему воздействию, если ПФ разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(p) = \frac{k_p}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}. \quad (1)$$

Передаточная функция по ошибке:

$$W_y(p) = \frac{1}{1 + W_p} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_p}. \quad (2)$$

Определим коэффициенты ряда Тейлора

$$C_0 = [W_y(p)]_{p=0} = 0,$$

$$C_1 = \left[ \frac{dW_y(p)}{dp} \right]_{p=0} = \left[ \frac{[3T_1 T_2 p^2 + 2(T_1 + T_2)p] \cdot [\text{знаменатель}] - [3T_1 T_2 p^2 + 2(T_1 + T_2)p + 1] [\text{числитель}]}{[\text{знаменатель}]^2} \right]_{p=0} = \frac{1}{k_p},$$

$$C_2 = \left[ \frac{d^2W_y(p)}{dp^2} \right]_{p=0} = 2 \left( \frac{T_1 + T_2}{k_p} - \frac{1}{k_p^2} \right),$$

$$C_3 = \left[ \frac{d^3 W_y(p)}{dp^3} \right]_{p=0} = 6 \left( \frac{T_1 T_2}{k_p} - 2 \frac{T_1 + T_2}{k_p^2} - \frac{1}{k_p^3} \right).$$

Если управляющее воздействие меняется по закону

$$g(t) = g_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

то установившаяся ошибка из выражения (4) будет

$$\varepsilon_{уст} = \frac{v_0 + at}{k_p} + a \left( \frac{T_1 + T_2}{k_p} - \frac{1}{k_p^2} \right).$$

## **Динамическое поведение САУ**

Задача анализа качества систем в переходных режимах тесно связана с задачами анализа переходных процессов, хотя и не совпадает с ними. Задача анализа качества регулирования в динамике заключается в том, чтобы оценить характеристики переходных процессов (ПП) или так называемые показатели качества, и предельные значения этих показателей.

В отличие от анализа переходных процессов, при анализе качества системы изучается не каждый ПП в отдельности, а только выясняется входят ли характеристики ПП или показатели качества в заданные пределы или нет.

Показатели качества регулирования зависят от типа входного воздействия.

### **Показатели качества регулирования при единичном ступенчатом сигнале**

Все переходные процессы можно разбить на два класса:

1. Установившиеся значения выходной величины не совпадают с первоначальными.
2. Установившиеся значения выходной величины и начальные совпадают.

1. В первом случае получаем характеристики ПП выходной величины при изменении управляющего воздействия (рис.90).

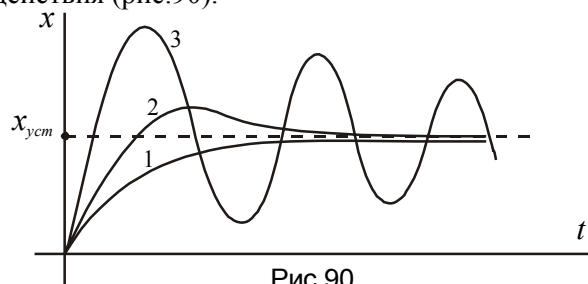


Рис.90

2. Во втором случае получаем характеристики переходных процессов выходной величины при изменении возмущения (рис.91).

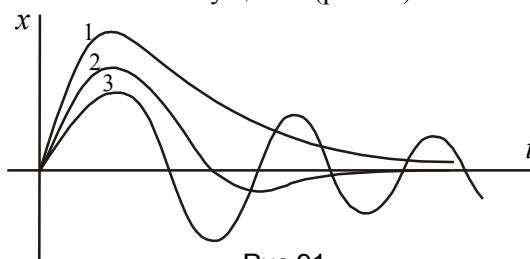


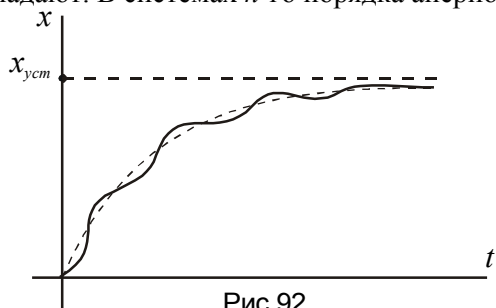
Рис.91

- 1 — аperiодические,
- 1,2 — монотонные процессы,
- 3 — колебательные переходные процессы.

Колебательные процессы соответствуют комплексным корням характеристического уравнения, аperiодические — вещественным корням.

При нулевых начальных условиях в САУ 2-го порядка аperiodические процессы будут монотонными 1 и 2, а колебательные – не монотонными 3.

В более сложных системах выше 2-го порядка понятия монотонности и аperiodичности не совпадают. В системах  $n$ -го порядка аperiodические процессы могут быть немонотонными.



На рис.92 приведен график переходного процесса выходной координаты системы 3-го порядка. На экспоненциальную характеристику (пунктир) накладывается колебательный процесс.

Колебательность и монотонность являются качественными оценками переходных процессов. Для качественных САУ (приборные системы и т.п.) стремятся получить процессы монотонные, слабоколебательные.

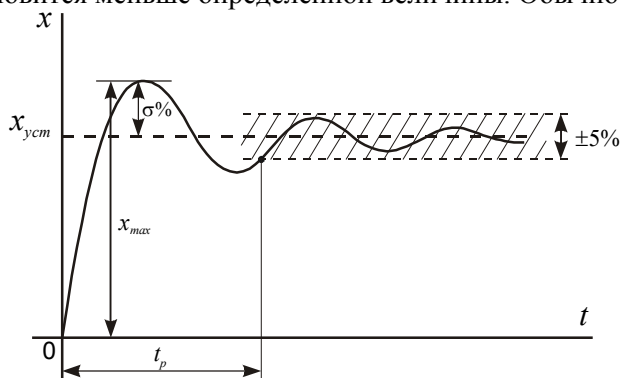
### Количественные характеристики переходных процессов

Качество регулирования складывается из следующих количественных показателей переходного процесса:

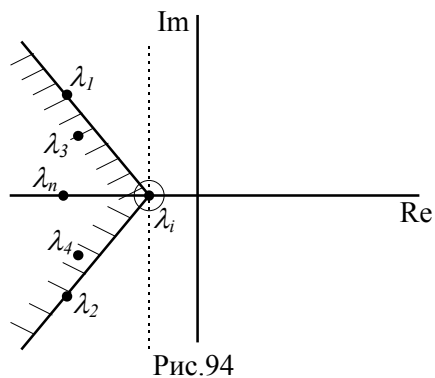
1. Время регулирования –  $t_p$ ;
2. Величина максимального перерегуливания –  $\sigma\%$ ;
3. Число колебаний переходного процесса –  $n$ .

Остановимся на них более подробно:

**1. Время регулирования** характеризует быстродействие САУ и определяется интервалом времени от начала ПП до момента, когда отклонение выходной величины от установившегося значения становится меньше определенной величины. Обычно это  $\pm 5\%$  от установившегося состояния (рис.93).



Быстродействие системы можно оценить по корням характеристического уравнения. Если известны корни, то время регулирования можно примерно оценить по величине вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис.94).



Мерой быстродействия является величина

$$r = \min |\operatorname{Re} \lambda_i|, \quad i = \overline{1, n}.$$

**2. Величина перерегуливания** –  $\sigma\%$ :

2.1. при управляющем воздействии

$$\sigma\% = \frac{x_{\max} - x_{уст}}{x_{уст}} \cdot 100\% \quad (\text{рис.93}),$$

2.2. при возмущающем воздействии.

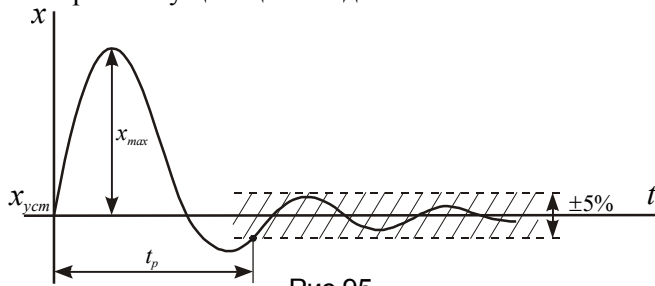


Рис.95

В случае ПП вызванных возмущением (рис.95), максимальное отклонение определяется величиной  $x_{\max}$  по отношению к установившемуся состоянию

$$\frac{x_{\max}}{x_{(t=\infty)}} = \sigma$$

САУ считается хорошей, если  $\sigma\% = 10 \div 30\%$ . В некоторых САУ

перерегулирование недопустимо.

3. Обычно, приемлемым числом колебания в САУ считается  $n = 1-3$ . Число колебаний равно числу минимумов в кривой переходного процесса в интервале времени  $t_p$ . Колебательность связана с размещением корней характеристического уравнения системы и определяется как максимальное отношение мнимой и вещественной частей комплексных корней, т.е.

$$\mu = \max_i \left| \frac{\omega_i}{\alpha_i} \right|, \quad i = \overline{1, n}.$$

Для того, чтобы ограничить колебательность, на плоскости корней задают сектор, определяемый максимальным значением  $\mu$  (рис.94).

В общем случае задача анализа состоит из определения допустимых пределов ПП (рис.96).

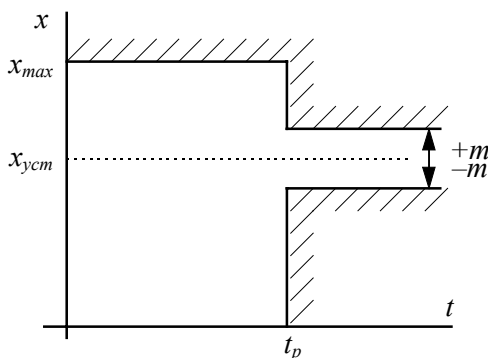


Рис.96

При выборе структурной схемы и значений параметров САУ, выполнить все перечисленные требования можно только принятием компромиссных решений из-за противоречивости этих требований.

### Оценка качества регулирования по косвенным критериям

Полное представление о качестве ПП дает, естественно, сама кривая ПП  $x(t)$ . Однако, при синтезе систем необходимо иметь возможность судить об основных показателях качества ПП без их построения, по каким-либо косвенным признакам, которые определяются более просто, чем кривая  $x(t)$ , и, кроме того, позволяют связать показатели качества непосредственно со значениями параметров системы. Такие косвенные признаки разработаны и называются критериями качества ПП. При исследовании качества ПП они играют ту же роль, что и критерии устойчивости при исследовании устойчивости САУ.

Существует три группы критериев качества:

1. Частотные.
2. Корневые.
3. Интегральные.

1. Частотные критерии основаны на связи между параметрами переходного процесса с параметрами частотных характеристик системы.

2. Корневые критерии основаны на распределении нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы. На качество ПП влияет расположение всех корней, как полюсов (знаменатель), так и нулей (числитель). Наиболее разработаны методы по распределению полюсов, поэтому их целесообразно применять для систем с ПФ, не имеющими нулей,  $W_3(p) = \frac{K}{D(p)}$ ,

где  $D(p)$  – полином, имеющий  $n$  - корней (полюсов),  
 $K = const$  – коэффициент усиления замкнутой системы.

К числу корневых критериев относятся:

1. Метод корневого годографа.
2. Диаграмма Вишнеградского.

3. При интегральном критерии строятся определенные интегралы от координат системы, от их производных, а также комбинации координат и производных.

По величине этих интегралов можно судить о качестве ПП. Отметим, что прямой связи между интегральным критерием и непосредственной оценкой кривой ПП не обнаружено, но его можно употреблять как самостоятельный критерий. По нему лучшей является та система, у которой интегральная оценка меньше.

### **Частотные критерии качества переходных процессов**

Эти критерии, как уже говорилось, позволяют судить о качестве ПП по частотным характеристикам замкнутой САУ.

#### Связь частотных характеристик замкнутой системы с переходной функцией

Если  $F(p)$  – изображение по Лапласу функции  $f(t)$ , то оригинал  $f(t)$  можно определить по формуле обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp, \quad (1)$$

где  $C$  – абсцисса абсолютной сходимости интеграла.

Если обозначить изображение по Лапласу переходной функции через  $H(p)$ , то получим

$$H(p) = W_3(p) \cdot G(p), \quad (2)$$

где  $W_3(p)$  – передаточная функция замкнутой системы.

$G(p)$  – изображение входного сигнала.

При  $g(t)$  – единичный ступенчатый сигнал

$$G(p) = \frac{1}{p}, \text{ тогда}$$

$$H(p) = \frac{W_3(p)}{p} \&h(t),$$

где  $h(t)$  – переходная функция.

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W_3(p)}{p} e^{pt} dp. \quad (3)$$

Отметим, что строить переходный процесс имеет смысл только для устойчивых систем. Следовательно, абсцисса абсолютной сходимости  $C=0$  и можно перейти от обратного преобразования Лапласа к обратному преобразованию Фурье:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_3(j\omega)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Если передаточная функция замкнутой системы представляет собой дробно-рациональную функцию  $W_3(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ , где  $M(p)$ ,  $N(p)$  – соответственно полиномы числителя и знаменателя от  $p$  ПФ замкнутой системы, то уравнение (3) можно преобразовать к следующему виду

$$h(t) = \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{M(\lambda_i)}{\lambda_i \cdot N'(\lambda_i)} e^{\lambda_i t} \quad \text{– формула Хевисайда,} \quad (5)$$

где  $\lambda_i$  – полюсы передаточной функции системы;

$n$  – порядок характеристического уравнения замкнутой системы.

$$N'(\lambda_i) = \left. \frac{\partial N(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Однако, для  $n > 3$  представляются большие трудности в нахождении корней  $\lambda_i$  и представлении  $h(t)$  в виде зависимости (5).

Запишем ПФ замкнутой системы в виде

$$W_3(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \quad (6)$$

Для установления зависимости  $h(t)$  от частотной функции замкнутой системы, воспользуемся конечным значением интеграла Фурье для единичной ступенчатой функции в виде

$$1(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (7)$$

Выражение (7) показывает, что единичная ступенчатая функция может быть представлена суммой постоянной составляющей и суммы бесконечного числа слагаемых (гармоник) вида  $\frac{d\omega}{\pi\omega} \sin \omega t$ , где  $0 < \omega < \infty$ .

Таким образом на вход системы действует постоянная составляющая  $\frac{1}{2}$  и бесконечное число гармоник.

Реакция системы на постоянную составляющую получаем в виде  $\frac{A(0)}{2}$ .

Если на вход системы подан гармонический сигнал, то на выходе установится также гармонический сигнал вида

$$\frac{A(\omega)d\omega}{\pi\omega} \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \quad \text{– для каждой гармоники.}$$

Применим принцип суперпозиции (справедливо только для линейных систем), и тогда получим реакцию системы на  $1(t)$  в виде

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A(\omega)}{\omega} \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega. \quad (8)$$

В (8) разложим  $\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ , получим

$$h(t) = \frac{A(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} \frac{A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega \right]. \quad (9)$$

Так как

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)},$$

а  $Q(\omega)$  – функция, нечетная от  $\omega$ , то при  $\omega = 0$ ,  $Q(0) = 0$ , тогда

$$A(0) = \sqrt{P^2(0)} = P(0), \quad (10)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}, \quad \varphi(0) = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega), \\ Q(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получим

$$h(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega - \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega \right]. \quad (12)$$

Подставим в (12)  $-t$ , тогда т.к. при  $t < 0$   $h(-t) = 0$ , получим

$$0 = \frac{P(0)}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega + \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega \right]. \quad (13)$$

Сложим (12) и (13) почленно, получим

$$h(t) = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega. \quad (14)$$

Вычтем из (12) уравнение (13), получим

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) дают связь переходной функции с частотной характеристикой системы. Причём для определения переходной функции необходимо иметь либо мнимую  $Q(\omega)$ , формула (14), либо вещественную  $P(\omega)$  формула (15), частотные характеристики.

Обе формулы (14) и (15), как уже было сказано, справедливы только для устойчивых систем.

Обычно для расчетов ПП используется вещественно-частотная характеристика замкнутой системы, т.к. в литературе для неё построено большее количество таблиц, графиков, номограмм.

## **Свойства вещественно-частотных характеристик и соответствующих им переходных функций**

### **1. Линейность**

Если ВЧХ  $P(\omega)$  может быть представлена суммой

$$P(\omega) = \sum_{i=1}^k P_i(\omega) \quad (\text{рис.97}), \quad \text{то переходная функция } h(t) \text{ будет}$$

также равна сумме  $h(t) = \sum_{i=1}^k h_i(t)$ , где

$$h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega.$$

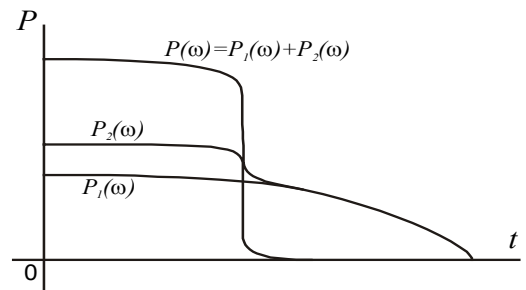


Рис.97

### **2. Изменение масштаба по оси ординат**

Умножим левую и правую части уравнения (15) на постоянную величину  $A$ , получим

$$Ah(t) = \frac{2A}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (16)$$

Если изменить масштаб ВЧХ по оси ординат в  $A$  раз, то масштаб по оси ординат переходной функции изменится во столько же раз.

### **3. Изменение масштаба по оси абсцисс**

Произведем замену в формуле (15) переменных  $\begin{cases} \omega = A\omega_1, \\ t = \frac{t_1}{A}, \end{cases}$

$$h\left(\frac{t_1}{A}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(A\omega_1)}{A\omega_1} \sin A\omega_1 \frac{t_1}{A} A d\omega_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(A\omega_1)}{\omega_1} \sin \omega_1 t_1 d\omega_1. \quad (17)$$

Опустим индекс 1 у  $\omega_1$  и  $t_1$  в уравнении (17), получим



$$h\left(\frac{t}{A}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(A\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (18)$$

Если масштаб по оси абсцисс ВЧХ увеличить в  $A$  раз, то масштаб по оси абсцисс переходной функции уменьшится в  $A$  раз. Из этого свойства следует (рис.98)

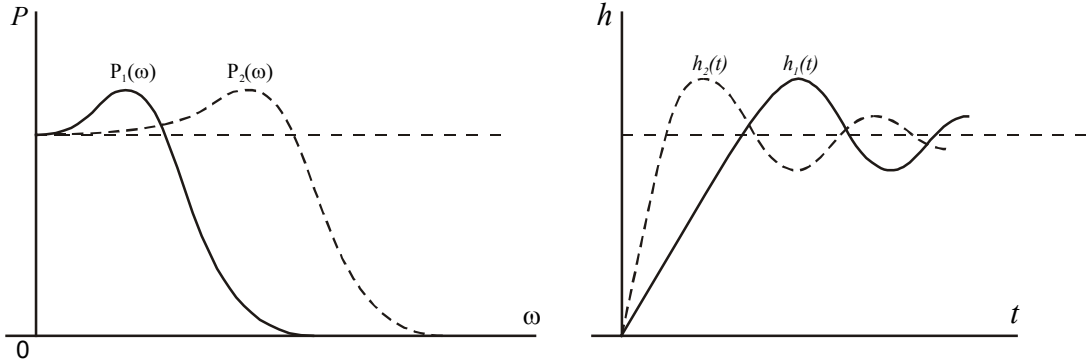


Рис.98

Если из двух сходных по форме частотных характеристик одна больше растянута по оси абсцисс  $\omega$ , то им соответствуют подобные кривые переходных процессов, но время ПП будет тем меньше, чем больше растянута  $P(\omega)$  по оси абсцисс.

Физика: Чем больше полоса пропускания частот САУ, тем меньше её инерционность и затухание сигнала.

**4. Теорема о начальном значении вещественно-частотной характеристики.**

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} P(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t). \quad (19)$$

Начальное значение ВЧХ  $P(\omega = 0)$  равно конечному значению переходной функции  $h(t = \infty)$ .

**5. Теорема о конечном значении вещественно-частотной характеристики.**

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t). \quad (20)$$

Конечное значение ВЧХ  $P(\omega \rightarrow \infty)$  равно начальному значению переходной функции  $h(t = 0)$ .

6. Если ВЧХ при  $\omega_i \neq 0$  имеет разрыв 2-го рода (в точке разрыва ВЧХ обращается в бесконечность), то характеристическое уравнение системы имеет пару чисто мнимых корней  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega_i$ . Если все остальные корни левые, то система, как известно, находится на границе устойчивости и при приложении ко входу  $g(t) = 1$  на выходе получаются гармонические колебания с частотой  $\omega_i$  (рис.99).

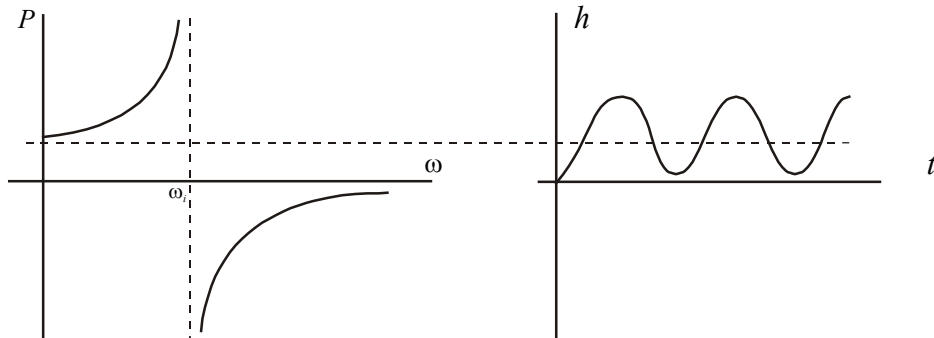


Рис.99

Из свойства 6 следует:

6.1. Если ВЧХ имеет резко выраженный экстремум, то переходная характеристика будет резко колебательной.

6.2. Если ВЧХ – монотонно убывающая функция, то переходная характеристика носит аperiодический характер.

Примеры: По виду ВЧХ построить качественную картину переходной функции.

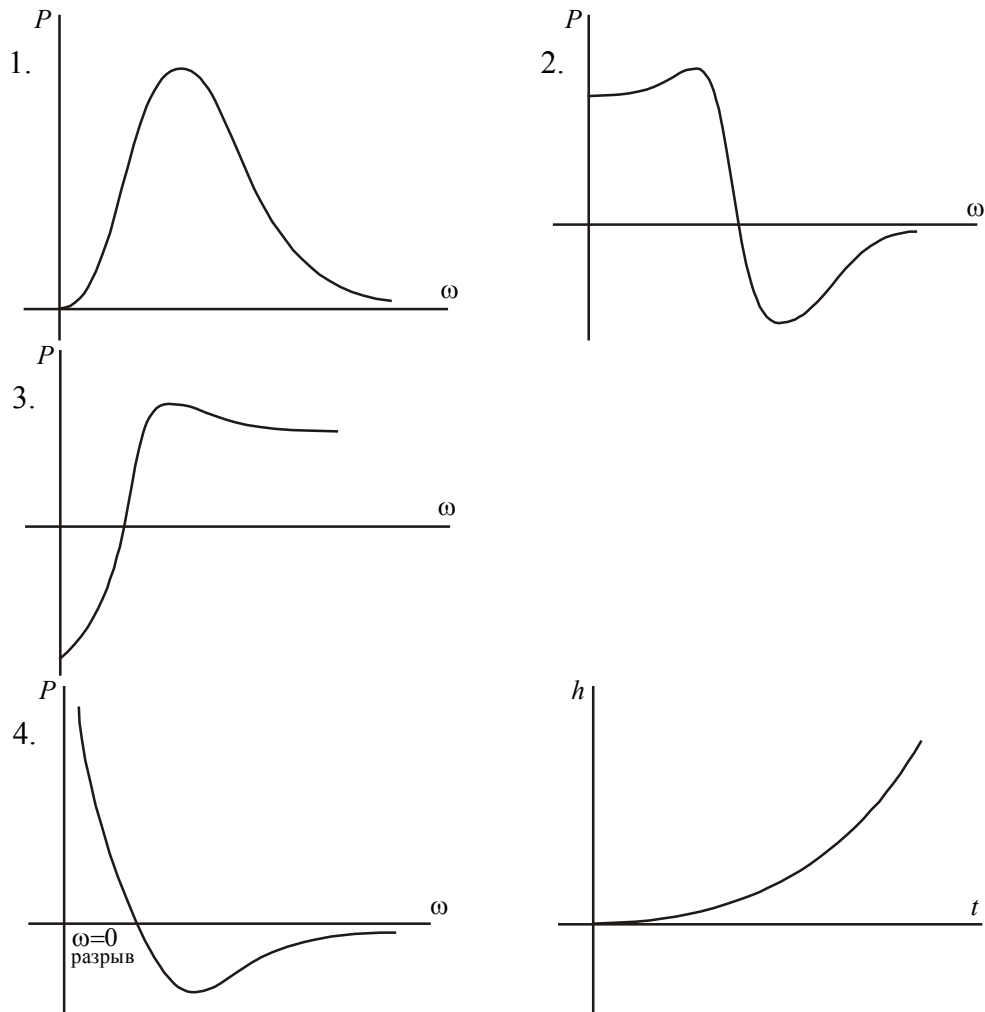


Рис.100

Если ВЧХ имеет разрыв при  $\omega = 0$ , то система находится на границе аperiodической неустойчивости (т.е. есть хотя бы один корень  $\lambda_i = 0$ ).

## Построение переходной характеристики по ВЧХ замкнутой системы

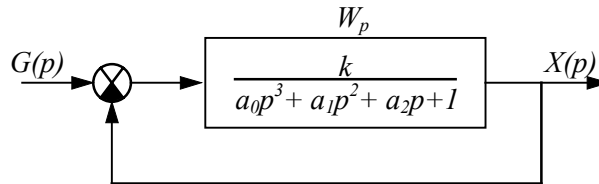
Связь переходной функции с ВЧХ замкнутой системы осуществляется по уравнению (15)

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (15)$$

Если  $P(\omega)$  имеет сложную зависимость, то аналитическое решение уравнения (15) затруднительно.

Пример:

Имеем систему



$$W_k = \frac{W_p}{1 + W_p} = \frac{k}{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + 1 + k},$$

$$W_s(j\omega) = \frac{k}{(1 + k - a_1 \omega^2) + j(a_2 \omega - a_0 \omega^3)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

$$P(\omega) = \frac{k(1 + k - a_1 \omega^2)}{(1 + k - a_1 \omega^2)^2 + (a_2 \omega - a_0 \omega^3)^2} - \text{ВЧХ замкнутой системы.}$$

Брать интеграл от  $P(\omega)$  очень сложно, поэтому наибольшее распространение получил графический метод нахождения  $h(t)$  по графику соответствующей ВЧХ замкнутой системы.

Рассмотрим метод трапеций, разработанный профессором В.В. Солодовниковым, применительно к ВЧХ замкнутой системы.

По этому методу ВЧХ заменяют ломаной (рис.101), так, чтобы:

1. Алгебраическая сумма площадей всех трапеций должна равняться площади, ограниченной ВЧХ и осями координат.
2. Все трапеции должны лежать большим основанием на оси частот и одной боковой стороной на оси ординат.

По принципу суперпозиций  $h(t) = \sum_{i=1} h_i(t)$ , где  $h_i(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_i(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega$ .

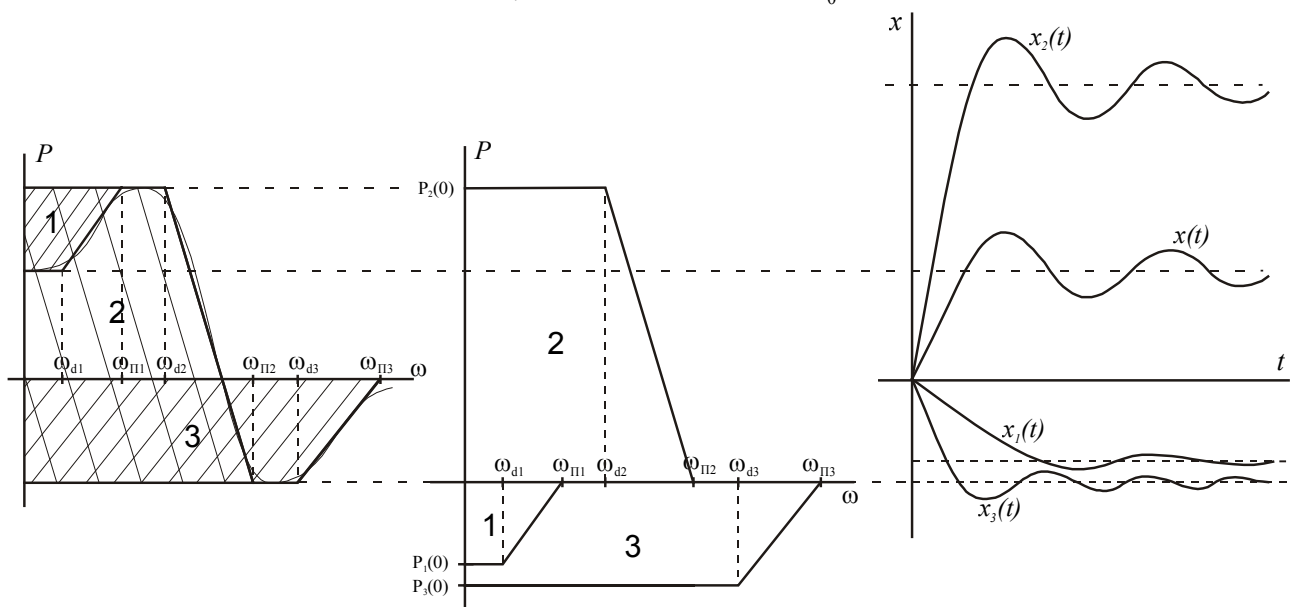


Рис.101

Построение отдельных составляющих  $h_i(t)$  легко осуществляется с помощью таблиц, называемых  $h(\tau)$ -функций, которые рассчитаны для нормированной единичной трапеции вида (рис.102).



2. Для каждой  $i$ -й трапеции находится коэффициент  $\chi_i = \frac{\omega_{di}}{\omega_{\Pi i}}$  (в примере  $i = 1, 2, 3$ ).
3. По таблице  $h$ -функций для определенного значения  $\chi_i$ , задаваясь временем  $\tau$  от 0 до  $\tau_i$  (установившееся значение) определяются  $h_i(\tau_i)$ , (в примере  $i = 1, 2, 3$ ).
4. По теореме об изменении масштаба по оси ординат, от единичной трапеции переходят к реальным.  $x_i(\tau) = h_i(\tau_i) \cdot P_i(0)$ , (в примере  $i = 1, 2, 3$ )
5. По теореме об изменении масштаба по оси абсцисс, переходят к реальному времени  $t$ .  

$$x_i(t) = x_i\left(\frac{\tau_i}{\omega_{\Pi i}}\right), \text{ (в примере } i = 1, 2, 3)$$
6. Результирующий ПП равен алгебраической сумме ПП для отдельных трапеций  

$$x(t) = \sum_{i=1} x_i(t), \text{ (в примере } i = 1, 2, 3)$$

Кроме рассмотренного метода трапеций применяется ещё метод треугольников. Он отличается от рассмотренного тем, что разбиение ВЧХ производится не на трапеции, а на треугольники, т.е. исключается еще один параметр  $\chi$ . Таблицы  $h$ -функций для треугольников несколько проще, однако он широко не распространён из-за большого количества треугольников, аппроксимирующих кривую ВЧХ.

### **Связь ВЧХ замкнутой системы с амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы (круговые диаграммы)**

Установим связь между кривой АФХ разомкнутой системы и ВЧХ замкнутой. С этой целью на график АФХ разомкнутой системы наносят сетку кривых одинаковых значений  $P(\omega)$ , называемую вещественной круговой диаграммой.

Если имеем САУ (рис.103)

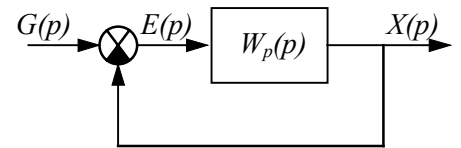


рис. 103

$$W_p(j\omega) = M(\omega) + jN(\omega), \quad (1)$$

$$W_s(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (2)$$

Подставим (1) в (2), получим

$$\begin{aligned} P(\omega) + jQ(\omega) &= \frac{M(\omega) + jN(\omega)}{1 + M(\omega) + jN(\omega)} \stackrel{[1+M(\omega)-jN(\omega)]}{=} \\ &= \frac{M(\omega) \cdot [1 + M(\omega)] + N^2(\omega) + j[N(\omega)][1 + M(\omega) - M(\omega)N(\omega)]}{[1 + M(\omega)]^2 + N^2(\omega)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Приравняем в (3) вещественные части, получим

$$P(\omega) = \frac{M(\omega)[1 + M(\omega)] + N^2(\omega)}{[1 + M(\omega)]^2 + N^2(\omega)} = \frac{M(\omega) + M^2(\omega) + N^2(\omega)}{[1 + M(\omega)]^2 + N^2(\omega)}. \quad (4)$$

Уравнение (4) при  $P(\omega) = const$  в координатной системе  $[M(\omega), N(\omega)]$  является уравнением окружности. Покажем это: Из (4) получаем

$$P(\omega) + 2P(\omega)M(\omega) + P(\omega)M^2(\omega) + P(\omega)N^2(\omega) - M(\omega) - M^2(\omega) - N^2(\omega) = 0 \quad (5)$$

или

$$M^2(\omega)[P(\omega) - 1] + M(\omega)[2P(\omega) - 1] + N^2(\omega)[P(\omega) - 1] = -P(\omega). \quad (6)$$

Разделим левую и правую части (6) на  $[P(\omega) - 1]$

$$M^2(\omega) + M(\omega) \frac{2P(\omega) - 1}{P(\omega) - 1} + N^2(\omega) = -\frac{P(\omega)}{P(\omega) - 1}. \quad (7)$$

Добавим к левой и правой частям (7) многочлен  $\frac{[2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2}$

$$M^2(\omega) + M(\omega) \frac{2P(\omega) - 1}{P(\omega) - 1} + \frac{[2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2} + N^2(\omega) = -\frac{P(\omega)}{P(\omega) - 1} + \frac{[2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2},$$

$$\left[ M(\omega) + \frac{2P(\omega) - 1}{2[P(\omega) - 1]} \right]^2 + N^2(\omega) = -\frac{P(\omega)}{P(\omega) - 1} + \frac{[2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2}. \quad (8)$$

Уравнение (8) в координатах  $[M(\omega), N(\omega)]$  при  $P(\omega) = const$  представляет собой окружность с радиусом

$$R^2 = -\frac{P(\omega)}{P(\omega) - 1} + \frac{[2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2} = \frac{-4P(\omega)[2P(\omega) - 1] + [2P(\omega) - 1]^2}{4[P(\omega) - 1]^2} =$$

$$= \frac{-4P^2(\omega) + 4P(\omega) + 4P^2(\omega) - 4P(\omega) + 1}{4[P(\omega) - 1]^2} = \frac{1}{4[P(\omega) - 1]^2}$$

или

$$R = \left| \frac{1}{2[P(\omega) - 1]} \right|. \quad (10)$$

Центр окружности расположен на вещественной оси  $M$  на расстоянии  $l = -\frac{2P(\omega) - 1}{2[P(\omega) - 1]}$  от начала координат.

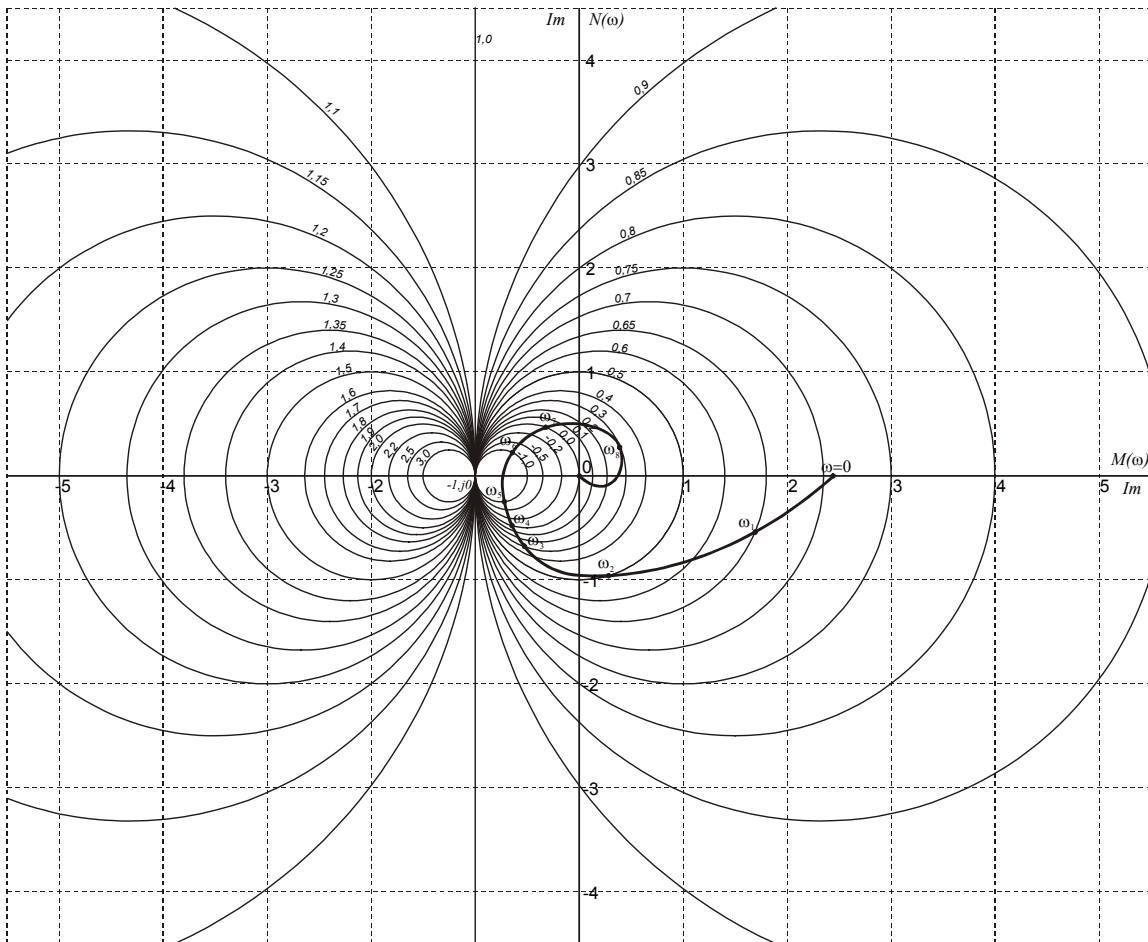


Рис.104

$$P(\omega) = 0; R = 0,5; l = -0,5.$$

$$P(\omega) = 0,5; R = 1; l = 0.$$

$$P(\omega) = 1,0; R = \infty; l = \infty (\text{прямая}).$$

$$P(\omega) = 1,5; R = 1; l = -2.$$

$$P(\omega) = 2,0; R = 0,5; l = -1,5.$$

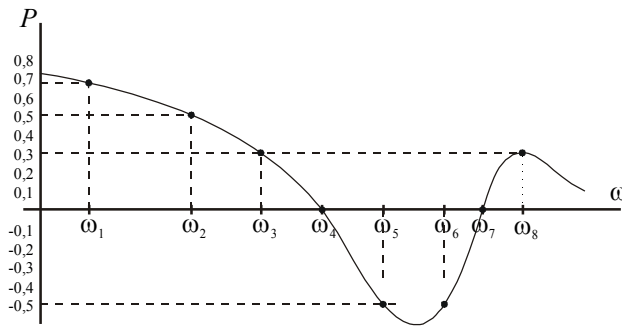


Рис.105

Для определения графика  $P(\omega)$  замкнутой системы, на круговую диаграмму, взятую из литературы (рис.104), необходимо наложить АФХ разомкнутой системы, вычерченную на кальке в том же масштабе. Точки пересечения АФХ с окружностями  $P = const$  будут определять ординаты  $P(\omega)$  при  $\omega$ , соответствующих точкам пересечения (рис.105).

Аналогичным образом может быть построена мнимая круговая диаграмма для  $Q = const$ .

Отметим, что круговыми диаграммами для построения ВЧХ замкнутой системы по АЧХ разомкнутой системы можно пользоваться только для систем с единичной обратной связью.

### Определение ВЧХ замкнутой системы по ЛЧХ разомкнутой системы

Если расчет устойчивости САУ производился по ЛЧХ, то аналогично выше рассмотренному, на плоскости ЛАФЧХ разомкнутой системы можно построить диаграммы с линиями равных  $P$  (или  $Q$ ) и определить ВЧХ (или МЧХ) замкнутой системы.

Если

$$W_p(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega), \quad (1)$$

то

$$W_s(j\omega) = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} = \frac{A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega)}{1 + A(\omega) \cos \varphi(\omega) + jA(\omega) \sin \varphi(\omega)}. \quad (2)$$

Выделив из (2) вещественную и мнимую части, получим

$$P(\omega) = \frac{A^2(\omega) + A(\omega) \cos \varphi(\omega)}{1 + A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega)} \quad (3)$$

и

$$Q(\omega) = \frac{A(\omega) \sin \varphi(\omega)}{1 + A^2(\omega) + 2A(\omega) \cos \varphi(\omega)}. \quad (4)$$

По уравнениям (3) [или (4)] при  $P = const$  (или  $Q = const$ ) построены диаграммы (номограммы) (рис. 106).

По известным ЛАХ и ЛФХ разомкнутой системы, для  $\omega_i$  строится на номограмме (на кальке в масштабе номограммы АФХ) характеристика разомкнутой системы, указывая частоты на ней  $\omega_i$ . По точкам пересечения этой характеристики с кривыми номограммы определяется вещественная (или мнимая) частотная характеристика замкнутой системы.

Аналогично предыдущему, номограммами для построения ВЧХ замкнутой системы по ЛЧХ разомкнутой можно пользоваться только для единичной обратной связи. При неединичной обратной связи, если есть возможность, то необходимо привести ОС к единичной. Если это не удастся, то круговыми диаграммами и номограммами пользоваться нельзя. В этом случае ВЧХ можно построить по аналитической зависимости  $P(\omega)$  замкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

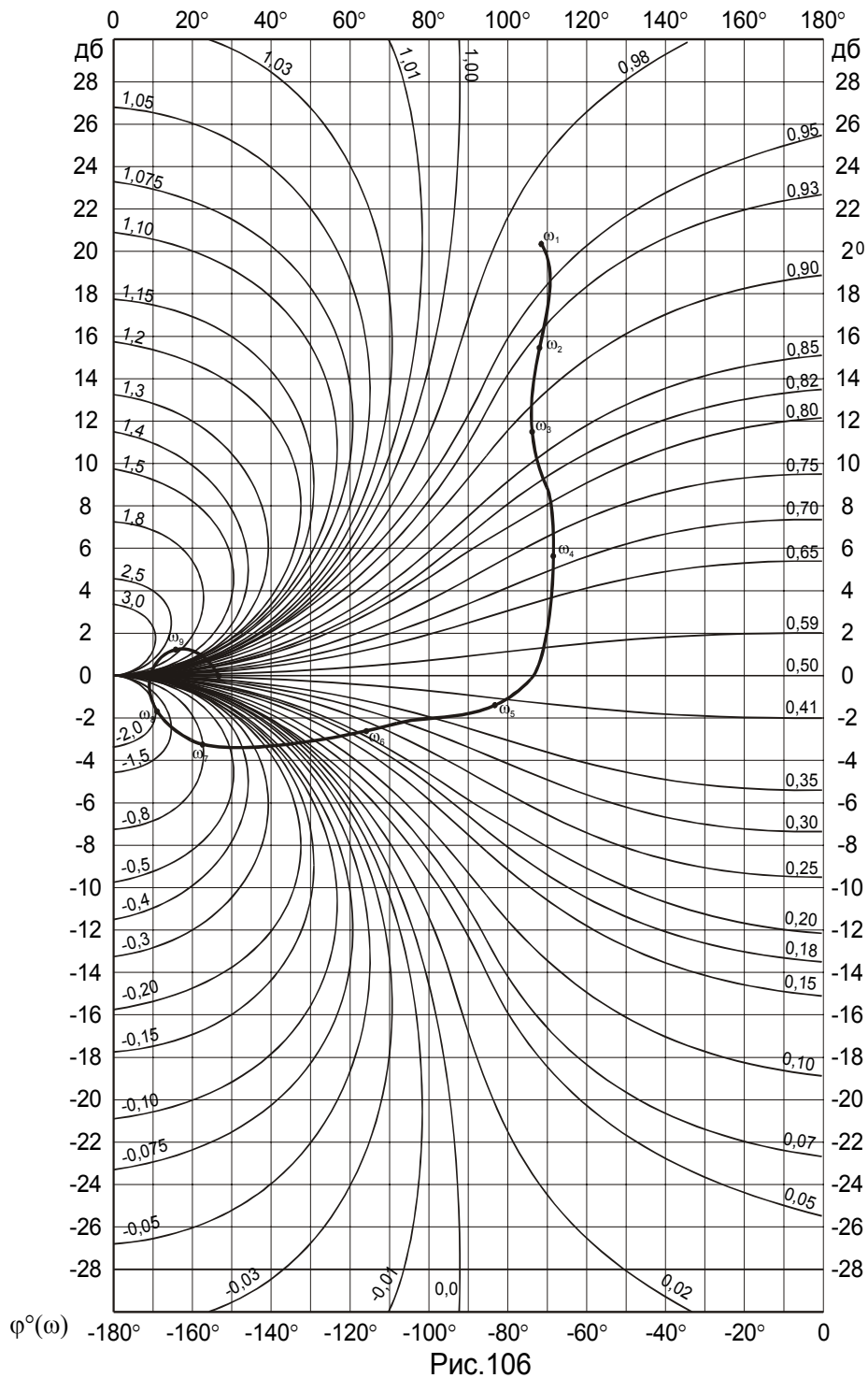


Рис.106

## **СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

### Постановка задачи:

Как мы уже говорили, при исследовании САУ приходится иметь дело с двумя задачами:

1. Задача анализа, когда при заданной САУ требуется определить её устойчивость и построить переходные процессы, т.е. имеем дело, в основном, с математической задачей.
2. Задача синтеза САУ, когда по заданным показателям качества необходимо определить параметры САУ.

Обе задачи имеют много общего и связаны между собой. Однако задача синтеза значительно сложнее задачи анализа, её решение не является однозначным, т.к. одни и те же качественные показатели можно удовлетворить различными путями.

Рассмотрим структуру САУ.



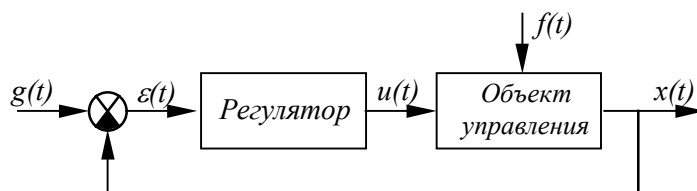


Рис.107

Синтезировать всю САУ почти невозможно. Поэтому обычно (что практически оправдано) часть проектируемой системы задано. Обычно задана и выбирается по техническим параметрам силовая часть системы (объект управления). Кроме того, заданы качественные показатели переходного процесса. Поэтому необходимо определить параметры регулятора, которые удовлетворяют выше названным требованиям.

Нередко задача синтеза суживается ещё больше, а именно, при заданном ОУ и регуляторе, требуемые показатели качества обеспечиваются включением так называемых корректирующих устройств.

### Формулировка задачи синтеза

Правильно поставленная задача синтеза должна содержать три элемента:

1. Задание математической модели объекта.
2. Задание требований к статическим и динамическим свойствам системы.
3. Задание класса регуляторов.

1. Математическая модель объекта, как известно, может быть представлена в виде:

- 1.1. Системы дифференциальных уравнений. Тогда математическая модель будет описываться тройкой матриц  $\{A, B, C\}$ ;
- 1.2. Передаточных функций (матриц)  $W(p)$ ;
- 1.3. Частотных характеристик системы  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ .

2. В зависимости от выбранной формы описания объекта, требования к статике и динамике системы могут быть также сформулированы в виде:

- 2.1. Желаемых матриц  $\{A^*, B^*, C^*\}$ , задающих поведение замкнутой системы;
- 2.2. Желаемых передаточных функций (матриц) замкнутой САУ  $W^*(p)$ ;
- 2.3. Желаемых частотных характеристик замкнутой системы  $W^*(j\omega)$ .

Желаемые характеристики во всех трёх случаях определяются исходя из требуемых показателей качества переходного процесса, т.е.  $\varepsilon$ ,  $t_p$ ,  $\sigma\%$ ,  $\mu$ .

3. Класс регуляторов задаётся также в зависимости от выбора описания объекта.

Сочетание всех трёх элементов обуславливает выбор метода синтеза системы. В настоящее время для синтеза линейных систем разработано  $\approx 15$  методов. Однако наибольшее распространение из них получили 5 - 6.

При синтезе современных сложных систем управления необходимо проводить анализ с точки зрения их управляемости, а предъявляемых требований с точки зрения их реализуемости.

### Управляемость динамических систем

Это понятие было сформулировано в начале 60-х годов в США Р.Калманом и в настоящее время является одним из фундаментальных понятий в теории управления.

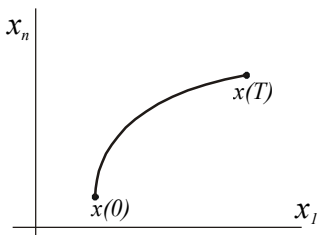


Рис.108

Калман рассматривал поведение линейной динамической системы  $\dot{x} = Ax + Bu$  и ставил задачу перевода системы из одной точки  $x(0)$  в другую  $x(T)$  (рис.108).

Объект называется управляемым, если он может быть переведен из точки  $x(0)$  в другую точку  $x(T)$  за конечное время  $t \in [0, T]$  при конечном управлении  $u$ .

### Критерий управляемости

Система будет управляемой, если специальная матрица управляемости имеет ранг, равный  $n$ , где  $n$  – порядок характеристического уравнения системы

Матрица управляемости составляется следующим образом:

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B].$$

Следовательно, для того, чтобы узнать управляема система или нет, необходимо по исходной системе дифференциальных уравнений составить матрицу управляемости  $P$  и определить её ранг.

Если  $x \in R^n, u \in R^m$ , то  $\dim P = n \times nm$ , причем если  $\text{rang} = n$  – то система полностью управляема, а если  $\text{rang} \neq n$  – то неуправляема.

Пример: Рассмотрим условие управляемости для скалярной системы, описываемой уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = 5x_1 - x_2 + 2u, \end{cases} \quad x \in R^2, u \in R^1, \quad n = 2, m = 1.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу управляемости:

$$P = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$\det P = -4 \neq 0$ , следовательно  $\text{rang} = 2$  – система полностью управляема.

Одно из свойств неуправляемой системы состоит в следующем: Если САУ описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и существует такое невырожденное преобразование координат  $\tilde{x} = Mx$ , где  $\det M \neq 0$ , что уравнение объекта может быть представлено в виде

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{A}_{12}\tilde{x}_2 + \tilde{B}_1u, \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{A}_{22}\tilde{x}_2, \end{cases}$$

то система является неуправляемой.

Действительно, поведение координаты  $\tilde{x}_2$  не зависит ни от  $\tilde{x}_1$ , ни от  $u$ , поэтому  $\tilde{x}_2$  является неуправляемой координатой.

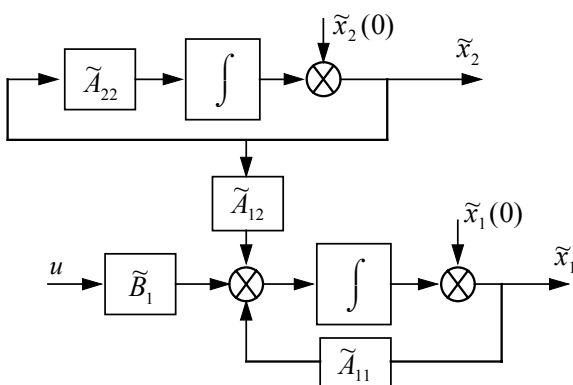


Рис.109

Неуправляемая часть системы влияет на процессы в управляемой части через матрицу  $\tilde{A}_{12}$ .

Если неуправляемая часть устойчива, то её влияние на переменные  $\tilde{x}_1$  будет сказываться до тех пор, пока не закончатся переходные процессы по  $\tilde{x}_2$ .

Если неуправляемая часть неустойчива, то она приводит к неустойчивости всей системы. Следовательно такую систему нужно переделать конструктивно.

### Реализуемость

Это понятие возникло потому, что в реальных системах управляющие воздействия всегда ограничены. Следовательно необходимо убедиться в том, что поставленные требования к системе будут реализованы.

Рассматривается реализуемость равновесного состояния и реализуемость заданного (желаемого) движения.

### 1. Реализуемость равновесного состояния

САУ описывается уравнением:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, u \in R^m, \dim A = n \times n, \dim B = n \times m, \text{rang} B = m - \text{полный.}$$

Реализуемым будем называть такое равновесное состояние, при котором вычисленные значения уравнений  $u$ , не выходят из области ограничений, т.е.  $u \in \Omega$ .

В статике  $\dot{x} = 0$ ; Пусть матрица  $A$  невырождена, т.е.  $\det A \neq 0$ .

$$0 = Ax_0 + Bu \Rightarrow x_0 = -A^{-1}Bu. \quad (1)$$

Обозначим  $D = -A^{-1}B$ , причем  $\dim D = n \times m$ .

Пусть  $\text{rang} D = m$ , т.е. является полным. Разобьем последнее уравнение на две системы

$$\begin{cases} x_1^0 = D_1 u, \\ x_2^0 = D_2 u, \end{cases} \quad (2)$$

где  $x_1^0 \in R^{n-m}$ ,  $x_2^0 \in R^m$ .

Переменные  $x_2^0$  можно выбирать таким образом, чтобы  $\text{rang} D_2 = m$ , т.е.  $\det D_2 \neq 0$ , тогда из второго уравнения (2) выразим управление

$$u = D_2^{-1} x_2^0. \quad (3)$$

Для определения множества равновесных состояний подставим (3) в первое уравнение из (2)

$$x_1^0 = D_1 D_2^{-1} x_2^0. \quad (4)$$

Из (4) видно, что множество равновесных состояний – есть многообразие в пространстве состояний, описываемое уравнением

$$S(x) = x_1^0 - D_1 D_2^{-1} x_2^0 = 0. \quad (5)$$

Размерность многообразия  $S \in R^m$ .

**Вывод:** С помощью  $m$ -мерного управления система  $n$ -го порядка не может быть переведена в произвольную точку пространства состояний. Её можно перевести лишь на многообразие размерности  $m$ .

**Пример:** Определить состояние равновесия для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 - u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 5x_2 + u. \end{cases}$$

Уравнение статики при  $\dot{x} = 0$

$$\begin{aligned} 2x_1^0 + x_2^0 - u &= 0, \\ -x_1^0 + 5x_2^0 + u &= 0 \end{aligned} \Rightarrow u = 2x_1^0 + x_2^0 \Rightarrow -x_1^0 + 5x_2^0 + 2x_1^0 + x_2^0 = 0,$$

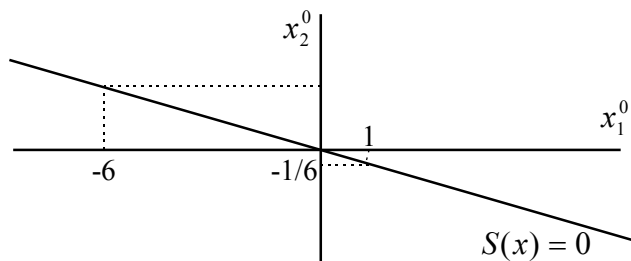


Рис.110

$$\begin{aligned} x_1^0 + 6x_2^0 &= 0, \\ x_2^0 + \frac{1}{6}x_1^0 &= 0, \end{aligned}$$

$$S(x) = x_2^0 + \frac{1}{6}x_1^0 = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^0.$$

### 2. Реализуемость желаемых дифференциальных уравнений

Рассмотрим объект, описываемый дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in R^n, \quad u \in R^m. \quad (1)$$

Зададим некоторое желаемое движение в виде дифференциального уравнения

$$\dot{x} = F(x, v) - \text{желаемое дифференциальное уравнение} \quad (2)$$

отражает требования, предъявляемые к системе, где  $v$  – вектор входных воздействий на систему.

Встает вопрос. Как выбрать функцию  $F$ ? Ответ дает условие реализуемости.

Реализуемыми называются такие желаемые дифференциальные уравнения  $\dot{x} = F(x, v)$ , для которых существует конечное управляющее воздействие, удовлетворяющее условию:

$$Ax + Bu = F(x, v). \quad (3)$$

Но матрица  $B$  в данном выражении прямоугольная и поэтому разрешить это уравнение относительно управления  $u$  нельзя. Тогда поступают следующим образом:

Разбивают (3) на две группы уравнений, таких

$$\begin{cases} A_1x + B_1u = F_1, \\ A_2x + B_2u = F_2, \end{cases} \quad \text{где } A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

причем, необходимо, чтобы матрица  $B_1$  была невырождена, т.е.  $\det B_1 \neq 0$ , следовательно матрица  $B_1$  будет квадратной и  $\dim B_1 = m \times m$ .

Тогда

$$u = B_1^{-1}(F_1 - A_1x) - \text{конечно.} \quad (5)$$

Подставим во второе уравнение системы (4) выражение (5) и выразим  $F_2$

$$F_2 = A_2x + B_2B_1^{-1}(F_1 - A_1x). \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что  $F_1$  можно задавать произвольно, а  $F_2$  – строго фиксировано и выбирается в соответствии с (6).

Вывод: Для объекта  $n$ -го порядка с  $m$ -мерным управляющим воздействием желаемое движение должно выбираться в виде

$$F(x, v) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ A_2x + B_2B_1^{-1}(F_1 - A_1x) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Произвольно можно задавать динамику для  $m$  переменных состояния, причем она создается в виде  $\dot{x} = F_1(x, v)$ .

Пример:

1. Объект описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u. \end{cases}$$

Проверим реализуемость условия:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1 = x_1 + x_2 + v, \\ \dot{x}_2 = F_2 = -x_1 + x_2 - 2v. \end{cases}$$

Приравняем первые уравнения между собой и определим  $u$ :

$$-3x_2 + 2u = x_1 + x_2 + v, \quad u = \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}v,$$

$$F_2 = \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}v = -\frac{3}{2}x_1 - 4x_2 - \frac{1}{2}v.$$

Из последнего выражения видно, что желаемая функция  $F_2$  при заданной  $F_1$  не совпадает со вторым выражением желаемой  $\dot{x}_2$ , следовательно требуемое условие не реализуемо.